 ©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Entwicklung der störenden Kräfte nach Vielfachen der mittleren Anomalien in independenter Form.

Von Dr. **Norbert Herz.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Februar 1885.)

Bezeichnet man die auf die Bahnebene des gestörten Himmelskörpers bezogenen rechtwinkeligen Coordinaten[1] des störenden Planeten mit x_1', y_1', z_1', die des gestörten mit x, y, z, die auf seine eigene Bahnebene (des störenden Körpers) bezogenen rechtwinkeligen Coordinaten des ersteren mit x_1, y_1, z_1, so ist:

$$\rho^2 = (x_1' - x)^2 + (y_1' - y)^2 + (z_1' - z)^2$$
$$r_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (r_1)^2 + z_1^2$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (r)^2 + z^2$$

wenn r_1, r die Entfernungen der beiden Himmelskörper vom Ursprung des Coordinatensystems (Sonnenmittelpunkt) bedeuten, (r_1), (r) die Projectionen dieser Entfernungen jedes der beiden Körper auf seine eigene Bahnebene und ρ die gegenseitige Entfernung der beiden Himmelskörper. Demnach ist

$$\rho^2 = (r_1)^2 + (r)^2 + z_1^2 + z^2 - z(xx_1' + yy_1' + zz_1')$$

Bedeuten nun i, Ω, ω; i_1, Ω_1, ω_1, beziehungsweise Neigung, Länge des aufsteigenden Knotens und Abstand des Perihels vom Knoten für den gestörten und störenden Himmelskörper, und setzt man

$$+ \cos\Omega \cos\omega - \sin\Omega \sin\omega \cos i = \text{I}$$
$$+ \sin\Omega \cos\omega + \cos\Omega \sin\omega \cos i = \text{II}$$
$$+ \sin\omega \sin i = \text{III}$$
$$- \cos\Omega \sin\omega - \sin\Omega \cos\omega \cos i = \text{IV}$$

---

[1] Die X-Axe geht nach dem Perihel des gestörten, die X'-Axe nach dem Perihel des störenden Himmelskörpers.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$
\begin{aligned}
-\sin\Omega\sin\omega+\cos\Omega\cos\omega\cos i &= \mathrm{V}\\
+\cos\omega\sin i &= \mathrm{VI}\\
+\sin\Omega\sin i &= \mathrm{VII}\\
-\cos\Omega\sin i &= \mathrm{VIII}\\
+\cos i &= \mathrm{IX}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+\cos\Omega_1\cos\omega_1-\sin\Omega_1\sin\omega_1\cos i_1 &= \mathrm{I}_1\\
+\sin\Omega_1\cos\omega_1+\cos\Omega_1\sin\omega_1\cos i_1 &= \mathrm{II}_1\\
+\sin\omega_1\sin i_1 &= \mathrm{III}_1\\
-\cos\Omega_1\sin\omega_1-\sin\Omega_1\cos\omega_1\cos i_1 &= \mathrm{IV}_1\\
-\sin\Omega_1\sin\omega_1+\cos\Omega_1\cos\omega_1\cos i_1 &= \mathrm{V}_1\\
+\cos\omega_1\sin i_1 &= \mathrm{VI}_1\\
+\sin\Omega_1\sin i_1 &= \mathrm{VII}_1\\
-\cos\Omega_1\sin i_1 &= \mathrm{VIII}_1\\
+\cos i_1 &= \mathrm{IX}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(AA) &= \mathrm{I\,I}_1+\mathrm{II\,II}_1+\mathrm{III\,III}_1\\
(AB) &= \mathrm{I\,IV}_1+\mathrm{II\,V}_1+\mathrm{III\,VI}_1\\
(AC) &= \mathrm{I\,VII}_1+\mathrm{II\,VIII}_1+\mathrm{III\,IX}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(BA) &= \mathrm{IV\,I}_1+\mathrm{V\,II}_1+\mathrm{VI\,III}_1\\
(BB) &= \mathrm{IV\,IV}_1+\mathrm{V\,V}_1+\mathrm{VI\,VI}_1\\
(BC) &= \mathrm{IV\,VII}_1+\mathrm{V\,VIII}_1+\mathrm{VI\,IX}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(CA) &= \mathrm{VII\,I}_1+\mathrm{VIII\,II}_1+\mathrm{IX\,III}_1\\
(CB) &= \mathrm{VII\,IV}_1+\mathrm{VIII\,V}_1+\mathrm{IX\,VI}_1\\
(CC) &= \mathrm{VII\,VII}_1+\mathrm{VIII\,VIII}_1+\mathrm{IX\,IX}_1
\end{aligned}
$$

so wird

$$
\begin{aligned}
x_1' &= (AA)x_1+(AB)y_1+(AC)z_1\\
y_1' &= (BA)x_1+(BB)y_1+(BC)z_1\\
z_1' &= (CA)x_1+(CB)y_1+(CC)z_1
\end{aligned}
$$

für die Werthe I, II, ... ergibt sich, wenn man

$$\pi = \omega+\Omega;\quad \pi_1 = \omega_1+\Omega_1$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

einführt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= +\cos\pi + 2\sin\Omega\sin\omega\sin\tfrac{1}{2}i^2 & \mathrm{I}_1 &= +\cos\pi_1 + 2\sin\Omega_1\sin\omega_1\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\\
\mathrm{II} &= +\sin\pi - 2\cos\Omega\sin\omega\sin\tfrac{1}{2}i^2 & \mathrm{II}_1 &= +\sin\pi_1 - 2\cos\Omega_1\sin\omega_1\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\\
\mathrm{III} &= +\sin\omega\sin i & \mathrm{III}_1 &= +\sin\omega_1\sin i_1\\
\mathrm{IV} &= -\sin\pi + 2\sin\Omega\cos\omega\sin\tfrac{1}{2}i^2 & \mathrm{IV}_1 &= -\sin\pi_1 + 2\sin\Omega_1\cos\omega_1\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\\
\mathrm{V} &= +\cos\pi - 2\cos\Omega\cos\omega\sin\tfrac{1}{2}i^2 & \mathrm{V}_1 &= +\cos\pi_1 - 2\cos\Omega_1\cos\omega_1\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\\
\mathrm{VI} &= +\cos\omega\sin i & \mathrm{VI}_1 &= +\cos\omega_1\sin i_1\\
\mathrm{VII} &= +\sin\Omega\sin i & \mathrm{VII}_1 &= +\sin\Omega_1\sin i_1\\
\mathrm{VIII} &= -\cos\Omega\sin i & \mathrm{VIII}_1 &= -\cos\Omega_1\sin i_1\\
\mathrm{IX} &= +\cos i & \mathrm{IX}_1 &= +\cos i_1
\end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned}
(AA) &= \cos(\pi-\pi_1) - 2\sin\omega\sin\tfrac{1}{2}i^2\sin(\pi_1-\Omega) - 2\sin\omega_1\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\sin(\pi-\Omega_1)\\
&\quad + 4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin\omega\sin\omega_1[\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\cos(\Omega-\Omega_1) + \cos\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1]\\
(AB) &= \sin(\pi-\pi_1) - 2\sin\omega\sin\tfrac{1}{2}i^2\cos(\pi_1-\Omega) - 2\cos\omega_1\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\sin(\pi-\Omega_1)\\
&\quad + 4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin\omega\cos\omega_1[\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\cos(\Omega-\Omega_1) + \cos\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1]\\
(AC) &= -\sin i_1\sin(\pi-\Omega_1) + \sin i\sin\omega + 4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin\omega[\sin\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1\cos(\Omega-\Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1]\\
(BA) &= -\sin(\pi-\pi_1) - 2\cos\omega\sin\tfrac{1}{2}i^2\sin(\pi_1-\Omega) - 2\sin\omega_1\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\cos(\pi-\Omega_1)\\
&\quad + 4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\cos\omega\sin\omega_1[\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\cos(\Omega-\Omega_1) + \cos\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1]
\end{aligned}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$(BB) = \cos(\pi - \pi_1) - 2\cos\omega \sin\tfrac{1}{2} i^2 \cos(\pi_1 - \Omega) - 2\cos\omega_1 \sin\tfrac{1}{2} i_1^2 \cos(\pi - \Omega_1)$$
$$+ 4 \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\omega \cos\omega_1 [\sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos(\Omega - \Omega_1) + \cos\Omega\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} i_1]$$

$$(BC) = -\sin i_1 \cos(\pi - \Omega_1) + \sin i \cos\omega + 4 \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\omega [\sin\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} i_1 \cos(\Omega - \Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1]$$

$$(CA) = -\sin i \sin(\pi_1 - \Omega) + \sin i_1 \sin\omega_1 + 4 \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \sin\omega_1 [\sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\tfrac{1}{2} i \cos(\Omega - \Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2} i_1 \sin\tfrac{1}{2} i]$$

$$(CB) = -\sin i \cos(\pi_1 - \Omega) + \sin i_1 \cos\omega_1 + 4 \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\omega_1 [\sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\tfrac{1}{2} i \cos(\Omega - \Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2} i_1 \sin\tfrac{1}{2} i]$$

$$(CC) = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2} i^2 - 2\sin\tfrac{1}{2} i_1^2 + 4 \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 [\cos\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} i_1 \cos(\Omega - \Omega_1) + \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1].$$

Da nun, wenn mit v_1, v die wahren Anomalien bezeichnet werden:

$$x_1 = (r_1)\cos v_1 \qquad x = (r)\cos v$$
$$y_1 = (r_1)\sin v_1 \qquad y = (r)\sin v$$
$$x_1^2 + y_1^2 = (r_1)^2 \qquad x^2 + y^2 = (r)^2$$

so wird, wenn man der Kürze wegen

$$m = \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos(\Omega - \Omega_1) + \cos\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} i_1$$
$$n = \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\tfrac{1}{2} i \cos(\Omega - \Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2} i_1 \sin\tfrac{1}{2} i \qquad (1)$$
$$p = \sin\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} i_1 \cos(\Omega - \Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1$$

setzt:

$$(AA) x_1 + (AB) y_1 = (r_1)\cos(\pi - \pi_1 - v_1) - 2(r_1)\sin\tfrac{1}{2} i^2 \sin\omega \sin(\pi_1 + v_1 - \Omega) - 2(r_1)\sin(\omega_1 + v_1)\sin\tfrac{1}{2} i_1^2 \sin(\pi - \Omega_1)$$
$$+ 4(r_1)\sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \sin\omega \sin(\omega_1 + v_1) \cdot m$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$(BA)x_1+(BB)y_1 = -(r_1)\sin(\pi-\pi_1-v_1)-2(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i^2\cos\omega\sin(\pi_1+v_1-\Omega)-2(r_1)\sin(\omega_1+v_1)\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\cos(\pi-\Omega_1)$$
$$+4(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\cos\omega\sin(\omega_1+v_1).m$$

$$(CA)x_1+(CB)y_1 = -(r_1)\sin i\sin(\pi_1+v_1-\Omega)+(r_1)\sin i_1\sin(\omega_1+v_1)+4(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin(\omega_1+v_1).n$$

und demnach:

$$xx'_1+yy'_1 = x[(AA)x_1+(AB)y_1]+y[(BA)x_1+(BB)y_1]+[(AC)x+(BC)y]z_1$$
$$= (r)(r_1)\cos(\pi+v-\pi_1-v_1)+(r)(r_1)\textcircled{a}+(r)\textcircled{aa}z_1$$
$$z'_1 = -(r_1)\sin i\sin(\pi_1+v_1-\Omega)+(r_1)\sin i_1\sin(\omega_1+v_1)+z_1+(r_1)\textcircled{c}+\textcircled{cc}z_1$$

wobei

$$\textcircled{a} = -2\sin\tfrac{1}{2}i^2\sin(\omega+v)\sin(\pi_1+v_1-\Omega)-2\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\sin(\omega_1+v_1)\sin(\pi+v-\Omega_1)$$
$$+4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin(\omega+v)\sin(\omega_1+v_1).m$$

$$\textcircled{aa} = -\sin i_1\sin(\pi+v-\Omega_1)+\sin i\sin(\omega+v)+4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin(\omega+v).p \qquad (2)$$

$$\textcircled{c} = +4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin(\omega_1+v_1).n$$

$$\textcircled{cc} = -2\sin\tfrac{1}{2}i^2-2\sin\tfrac{1}{2}i_1^2+4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1[\cos\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1\cos(\Omega-\Omega_1)+\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1]$$

Der Ausdruck für ⓐ kann auch geschrieben werden:

$$\textcircled{a} = +\sin\tfrac{1}{2}i^2[\cos(\pi_1+v_1+\omega-\Omega+v)-\cos(\pi+v-\pi_1-v_1)]+\sin\tfrac{1}{2}i_1^2[\cos(\pi+v+\omega_1-\Omega_1+v_1)-$$
$$-\cos(\pi+v-\pi_1-v_1)]+2\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1[\cos(\omega+v-\omega_1-v_1)-\cos(\omega+v+\omega_1+v_1)]m.$$

Setzt man auch noch

$$\textcircled{ab} = -\sin i\sin(\pi_1+v_1-\Omega)+\sin i_1\sin(\omega_1+v_1)+4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin(\omega_1+v_1).n \qquad (3)$$

so wird

$$x x_1' + y y_1' + z z_1' = (r)(r_1)\cos(\pi + v - \pi_1 - v_1) + (r)(r_1)\textcircled{a} + \\ + (r)\textcircled{aa} z_1 + (r)\textcircled{ab} z + z z_1 + \textcircled{cc} z z_1$$

und demnach, wenn

$$-2(r)(r_1)\textcircled{a} - 2(r)\textcircled{aa} z_1 - 2(r_1)\textcircled{ab} z - 2\textcircled{cc} z z_1 + (z_1 - z)^2 = \zeta_1^2 \\ (r)^2 + (r_1)^2 - 2(r)(r_1)\cos(\pi + v - \pi_1 - v_1) = R_1^2 \qquad (4)$$

gesetzt wird:

$$\rho_1^2 = R_1^2 + \zeta_1^2$$

$$\frac{1}{\rho_1^3} = \frac{1}{R_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\zeta_1^2}{R_1^5} + \frac{3.5}{2.4}\frac{\zeta_1^4}{R_1^7} - \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{\zeta_1^6}{R_1^9} + \cdots \qquad (5)$$

Sei nun

$$(a^2 + a_1^2 - 2a a_1\cos\varphi)^{-\frac{2s+1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_s^{(i)}\cos i\varphi; \quad c_s^{(-i)} = c_s^{(i)}$$

und

$$R_0^2 = a^2 + a_1^2 - 2a a_1\cos(M + \pi - M_1 - \pi_1)$$

wo a, a_1 die halben Bahnaxen π, π_1 die Längen der Perihelien M, M_1 die mittleren Anomalien sind, so ist

$$\frac{1}{R_0^{2s+1}} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_s^{(i)}\cos i(M + \pi - M_1 - \pi_1).$$

Sei ferner [1]

$$P = \frac{1}{\rho_0^3} = \frac{1}{R_0^3} - \frac{3}{2}\frac{\zeta_1^2}{R_0^5} + \frac{3.5}{2.4}\frac{\zeta_1^4}{R_0^7} - \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{\zeta_1^6}{R_0^9} + \cdots$$

und setzt man

$$Z^{(\sigma)} = c_1^{(\sigma)} - \frac{3}{2}\zeta_1^2 c_2^{(\sigma)} + \frac{3.5}{2.4}\zeta_1^4 c_3^{(\sigma)} - \frac{3.5.7}{2.4.6}\zeta_1^6 c_4^{(\sigma)}. \\ + (-1)^s\frac{3.5....(2s+1)}{2.4.6....2s}c_{s+1}^{(\sigma)}\zeta_1^{2s} + . \qquad (6)$$

$$Z^{(-\sigma)} = Z^{(\sigma)}$$

[1] Eigentlich hätte man auch zu schreiben P_1; $Z_1^{(\sigma)}$ u. s. w., da diese Ausdrücke für jeden störenden Himmelskörper zu entwickeln sind; indem aber ein Misverständnis nicht entstehen kann, wurde der Index Kürze halber überall weggelassen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so wird

$$P = \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)} \cos\sigma(M+\pi-M_1-\pi_1)$$

Da z, z_1 die senkrecht zu seiner eigenen Bahnebene gemessene Entfernung jedes Himmelskörpers ist, so folgt, dass ζ_1 von der Ordnung der Neigungen der beiden Bahnebenen ist, so dass man aus dem Ausdrucke für $Z^{(\sigma)}$ ersehen kann, wie weit man die Entwicklungscoëfficienten $c_s^{(i)}$ benöthigt; sollen noch die zweiten vierten, sechsten Potenzen der Neigungen berücksichtigt werden, so wird man noch die Entwicklungscoëfficienten der $^5/_2$ten, $^7/_2$ten, $^9/_2$ten Potenz des Ausdruckes $(a^2+a_1^2-2aa_1\cos\varphi)$ zu bilden haben.

Rechnet man nun die Störungen der mittleren Anomalie, so wird die in jedem Momente stattfindende wahre Anomalie mit der gestörten mittleren durch die Formeln der elliptischen Bewegung verbunden sein. Ist ferner $\bar{r}$ der ungestörte Radius vector, r der gestörte, so wird

$$r = \bar{r}(1+\gamma)$$

sein, wo γ die Störung des Radius vectors bedeutet, und es ist

$$r = (a+\Delta a)(1+\gamma) \qquad v = M+\Delta M$$

wenn

$$\Delta a = -\frac{a}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tau^{(i)} \cos iM$$

$$\Delta M = +\frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha^{(i)} \sin iM \qquad (7)$$

in welchen Ausdrücken die Coëfficienten $\tau^{(i)}$, $\alpha^{(i)}$ die bekannten Functionen der Excentricität bedeuten. Ähnliche Ausdrücke gelten für den störenden Himmelskörper. Ersetzt man daher in der Formel

$$r = a+\Delta a$$

überall a durch $a(1+\gamma)$, so wird man in der Störungsfunction die Störung des Radius vectors berücksichtigt haben, weil in Formel (4) für (r), (r_1) die gestörten (wahren) Radien vectoren in Rechnung zu ziehen sind.

Die Entwicklung von $\frac{1}{\rho^3}$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz liefert nun:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1^3} = P &+ \frac{\partial P}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial P_1}{\partial a_1}\Delta a_1 + \frac{\partial P}{\partial (M-M_1)}\Delta(M-M_1)\\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial a^2}\Delta a^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial a_1^2}\Delta a_1^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial (M-M_1)^2}\Delta(M-M_1)^2\right.\\ &+ 2\frac{\partial^2 P}{\partial a\,\partial a_1}\Delta a\,\Delta a_1 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial a\,\partial (M-M_1)}\Delta a\,\Delta(M-M_1) +\\ &\left.+ 2\frac{\partial^2 P}{\partial a_1\,\partial (M-M_1)}\Delta a_1\,\Delta(M-M_1)\right]\\ &+\\ &+ \frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial}{\partial a_1}\Delta a_1 + \frac{\partial}{\partial (M-M_1)}\Delta(M-M_1)\right\}^n P\end{aligned} \tag{8}$$

wobei im allgemeinen Gliede die gebräuchliche symbolische Bezeichnungsweise gewählt wurde. Bedenkt man nun, dass sich jede einzelne Potenz $\frac{1}{R_1^{2s+1}}$ in eine ähnliche Reihe entwickeln lässt, und dass dann $\frac{1}{\rho_1^3}$ sich in derselben Weise aus $\frac{1}{R_1^{2s+1}}$ zusammensetzt, wie P aus $\frac{1}{R_0^{2s+1}}$, so erkennt man sofort, dass bei der Bildung der Differentialquotienten von P die Potenzen von ζ_1 nicht differenzirt werden; dann aber erhält man durch Einführung der abgekürzten Schreibweise:

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} Z^{(\sigma)}}{\partial a^\mu\,\partial a_1^\nu} = Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\mu+\nu} P}{\partial a^\mu\,\partial a_1^\nu} &= \frac{1}{2}\sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu}\cos\sigma(M+\pi-M_1-\pi_1)\\ \frac{\partial^{2i+\mu+\nu} P}{\partial (M-M_1)^{2i}\,\partial a^\mu\,\partial a_1^\nu} &= \frac{1}{2}\sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty}(-1)^i\sigma^{2i} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu}\cos\sigma(M+\pi-M_1-\pi_1)\\ \frac{\partial^{2i+1+\mu+\nu} P}{\partial (M-M_1)^{2i+1}\,\partial a^\mu\,\partial a_1^\nu} &= \frac{1}{2}\sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty}(-1)^{i+1}\sigma^{2i+1} Z^{(\sigma)}_{\mu,}\sin\sigma(M+\pi-M_1-\pi_1)\end{aligned} \tag{9}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und mit Rücksicht auf die eingeführte Bezeichnung ist

$$Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} c_1^{(\sigma)}}{\partial a^\mu \partial a_1'} - \frac{3}{2}\zeta_1^2 \frac{\partial^{\mu+\nu} c_2^{(\sigma)}}{\partial a^\mu \partial a_1'} + \frac{3.5}{2.4}\zeta_1^4 \frac{\partial^{\mu+\nu} c_3^{(\sigma)}}{\partial a^\mu \partial a_1'} - \cdots \qquad (10)$$

Aus dem Werthe von Δa (Gleichung 7) folgt:

$$(\Delta a)^2 = \frac{a^2}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau^{(i)} \tau^{(k)} \cos iM \cos kM$$

$$= \frac{a^2}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau^{(i+k)} \tau^{(k)}\right] \cos iM$$

Wird demnach

$$h_{2,i} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau^{(k)} \tau^{(i+k)}$$

gesetzt, so wird

$$(\Delta a)^2 = \frac{a^2}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{2,i} \cos iM$$

Man kann auf demselben Wege die folgenden Potenzen entwickeln, und findet leicht, dass man ganz allgemein

$$(\Delta a)^s = \frac{(-a)^s}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{s,i} \cos iM \qquad (11)$$

setzen kann; dann erhält man durch Multiplication dieses Ausdruckes mit Δa

$$(\Delta a)^{s+1} = \frac{(-a)^{s+1}}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{s,i} \tau^{(k)} \cos iM \cos kM$$

$$= \frac{(-a)^{s+1}}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{s,i-k} \tau^{(k)}\right] \cos iM$$

Durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem aus (11) für $s+1$ statt s folgenden Werthe findet sich sofort

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$h_{s+1,i} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{s,k}\, \tau^{(i+k)} \qquad (11\ a)$$

wobei, wie sich äusserst leicht ergibt, die Beziehung besteht:

$$h_{s,-i} = h_{s,i} \qquad (11\ b)$$

Die Gleichungen (11 *a*) gelten auch schon für $s = 1$, wenn man

$$h_{1,i} = \tau^{(i)}$$

$$h_{0,0} = 2, \quad h_{0,1} = h_{0,2} = h_{0,3} = \ldots = 0$$

setzt. Für die $h_{s,i}$ lassen sich sehr einfach Probegleichungen aufstellen; man hat nämlich zunächst für $M = 0$:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{1,i} = +e; \quad \Delta a = -ae; \quad (\Delta a)^s = (-a)^s e^s$$

folglich

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{s,i} = e^s$$

Andere Probegleichungen, die durch zweimalige Differentiation von (11) nach M folgen, sind

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i^2 h_{s,i} = \frac{2s\,e^s}{1-e^2}$$

Zur Berechnung der h_s, ist es aber nicht nöthig, die unendlichen Reihen (11 *a*), welche in der Praxis allerdings einmal abgebrochen werden, zu verwenden. Bezeichnet man nämlich mit $S_i^{(m)}$, $C_i^{(m)}$ die Entwicklungscoëfficienten der sin und cos der Vielfachen der excentrischen Anomalie nach Vielfachen der mittleren Anomalie, also

$$\sin mE = \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{(m)} \sin iM$$

$$\cos mE = \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^{(m)} \cos iM$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so gelten die Relationen (s. Astronomische Nachrichten, Nr. 2592)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{(m)} C_{k-i}^{(n)} &= S_k^{(m+n)} + S_k^{(m-n)} \\
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^{(m)} S_{k-i}^{(n)} &= S_k^{(m+n)} - S_k^{(m-n)} \\
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^{(m)} C_{k-i}^{(n)} &= C_k^{(m+n)} + C_k^{(m-n)} \\
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{(m)} S_{k-i}^{(n)} &= C_k^{(m+n)} - C_k^{(m-n)}
\end{aligned} \qquad (12)$$

mit deren Hilfe man findet:

$$h_{2,i} = \frac{e^2}{2}\left(C_i^{(0)} + C_i^{(2)}\right)$$

$$h_{3,i} = \frac{e^3}{4}\left(3C_i^{(1)} + C_i^{(3)}\right)$$

$$h_{4,i} = \frac{e^4}{8}\left(3C_i^{(0)} + 4C_i^{(2)} + C_i^{(4)}\right)$$

und allgemein

$$h_{m,i} = \frac{e^m}{2^{m-1}}\left\{C_i^{(m)} + \binom{m}{1} C_i^{(m-2)} + \binom{m}{2} C_i^{(m-4)} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\binom{m}{\frac{m}{2}} C_i^{(0)} \text{ für } m \text{ gerade} \right\}$$

$$\left. + \binom{m}{\frac{m-1}{2}} C_i^{(1)} \text{ für } m \text{ ungerade} \right\}$$

Die allgemeine Giltigkeit dieser Formel ergibt sich durch Benützung von (11 a) mit Berücksichtigung der Relationen (12) und

$$\binom{m}{\lambda} + \binom{m}{\lambda-1} = \binom{m+1}{\lambda}; \quad \frac{1}{2}\binom{m+1}{\frac{m+1}{2}} = \binom{m}{\frac{m-1}{2}}$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Für die Entwicklung von $\Delta(M-M_1)^s$ setzen wir zunächst

$$\mathrm{I}=\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(i)}\sin iM;\quad \mathrm{II}=\tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha'^{(k)}\sin kM_1$$

Dann ist

$$\Delta(M-M_1)=\mathrm{I}-\mathrm{II}$$

wo I nur von der Excentricität und mittleren Anomalie des gestörten Planeten abhängt, und II in derselben Weise aus den entsprechenden Grössen des störenden Planeten zusammengesetzt ist. Indem nun

$$\mathrm{I}^2=\tfrac{1}{4}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(i)}\sin iM\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(k)}\sin kM$$

$$=\tfrac{1}{4}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(k)}\alpha^{(i+k)}\cos iM$$

so wird, wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(k)}\alpha^{(i+k)}=\eta_{2,i}$$

gesetzt wird:

$$\mathrm{I}^2=\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\eta_{2,i}\cos iM$$

Erhebt man diese Gleichung zur $s$ten Potenz, so wird das Resultat dasselbe, wie bei $(\Delta a)^s$ sein müssen, wenn nur $\tau^{(i)}$ durch $\eta_{2,i}$ ersetzt wird; man hat demnach

$$\mathrm{I}^{2s}=\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\eta_{2s,i}\cos iM$$

$$\eta_{2s+2,i}=\tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\eta_{2s,k}\eta_{2,i+k}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Doch lässt sich auch ohne Mühe eine andere Recursionsformel finden, welche jede Reihe der η aus der unmittelbar vorhergehenden und den Coëfficienten α gibt, indem man nämlich I^{2s} in der obigen Form voraussetzt, und mit dem Ausdrucke für I multiplicirt, und ebenso den resultirenden für I^{2s+1} behandelt. Auf diesem Wege erhält man:

$$\left.\begin{aligned} I^{2s} &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \eta_{2s,i}\cos iM \\ I^{2s+1} &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \eta_{2s+1,i}\sin iM \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \eta_{2s+1,i} &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_{s,k}\alpha^{(i+k)} \\ \eta_{s,-i} &= (-1)^s\eta_{s,i}; \quad \eta_{2s+1,0} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13\,a)$$

Auch hier hat man wieder $\eta_{2,i} = \alpha^{(i)}$ zu setzen. Da

$$I_{M=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial I}{\partial M}\right)_{M=0} = -1 + \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2}$$

so erhält man leicht die Probegleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\eta_{2s,0} + \sum_{=1}^{\infty}\eta_{2s,i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2\eta_{2,i} = -8e^2 - 20e^3 - \frac{73}{2}e^4 - 57e^5 - \frac{327}{4}e^6 - \frac{221}{2}e^7 - \frac{4589}{32}e^8 - \frac{2885}{16}e^9 - \frac{14165}{64}e^{10}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2\eta_{2s,i} = 0 \qquad \text{für } s > 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\eta_{2s+1,i} = 0 \qquad \text{für } s \gtrless 1$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ganz ähnlich den Formeln (13) hat man für den störenden Körper

$$\Pi^{2s} = \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \cos iM_1$$

$$\Pi^{2s+1} = \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \eta'_{2s+1,\,i} \sin iM_1$$

Demnach wird man in

$$\Delta(M-M_1)^{2s} = \mathrm{I}^{2s} + \sum_{\varkappa=1}^{2s-1} (-1)^{\varkappa} \binom{2s}{\varkappa} \mathrm{I}^{2s-\varkappa}\Pi^{\varkappa} + \Pi^{2s}$$

die eben angeschriebenen Werthe einzuführen haben. Führt man das Product hier getrennt für gerade und ungerade $\varkappa$ durch, und ersetzt überall die Producte von trigonometrischen Functionen durch Summen, so findet man, dass sich in beiden Fällen

$$\mathrm{I}^{2s-\varkappa}\Pi^{\varkappa} = \tfrac{1}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_{2s-\varkappa,\,i}\,\eta'_{\varkappa,\,k} \cos(iM-kM_1)$$

schreiben lässt; folglich wird die obige Summe

$$\Delta(M-M_1)^{2s} = \\ = \tfrac{1}{4} \sum_{\varkappa=0}^{2s} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\varkappa} \binom{2s}{\varkappa} \eta_{2s-\varkappa,\,i}\,\eta'_{\varkappa,\,k} \cos(iM-kM_1)$$

wo auch für

$$\eta_{0,0} = 2; \quad \eta_{0,1} = \eta_{0,2} = \eta_{0,3} = \ldots = 0; \quad \eta_{1,i} = \alpha^{(i)}$$

zu setzen ist. Auf demselben Wege findet man weiter:

$$\mathrm{I}^{2s+1-2\varkappa}\Pi^{2\varkappa} = \tfrac{1}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_{2s+1-2\varkappa,\,i}\,\eta_{2\varkappa,\,k} \sin(iM-kM_1)$$

$$\mathrm{I}^{2s-2\varkappa}\Pi^{2\varkappa+1} = -\tfrac{1}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_{2s-2\varkappa,\,i}\,\eta'_{2\varkappa+1,\,k} \sin(iM-kM_1)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\Delta(M-M_1)^{2s+1} =$$
$$= \tfrac{1}{4}\sum_{\varkappa=0}^{2s+1}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\binom{2s+1}{\varkappa}\eta_{2s+1-\varkappa,\,i}\,\eta'_{\varkappa,\,k}\sin(iM-kM_1)$$

Setzt man demnach ganz allgemein

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=0}^{s}\binom{s}{\varkappa}\eta_{s-\varkappa,\,i}\,\eta'_{\varkappa,\,k} &= (s,i,k)\\ \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=0}^{s}(-1)^{\varkappa}\binom{\varkappa}{s}\eta_{s-\varkappa,\,i}\,\eta'_{\varkappa,\,k} &= [s,i,k]\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned}\Delta(M-M_1)^{2s} &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[2s,i,k]\cos(iM-kM_1)\\ \Delta(M-M_1)^{2s+1} &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(2s+1,i,k)\sin(iM-kM_1)\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Zwischen den (s,i,k) und $[s,i,k]$ bestehen die folgenden, leicht zu verificirenden Relationen:

$$[2s,\ 0,\ 0] = (2s,\ 0,\ 0)$$

$$[2s,\ i,\ 0] = (2s,\ i,\ 0)$$
$$[2s,\ -i,\ 0] = (2s,\ -i,\ 0) = [2s,\ i,\ 0] = (2s,\ i,\ 0)$$
$$[2s,\ 0,\ k] = (2s,\ 0,\ k)$$
$$[2s,\ 0,\ -k] = (2s,\ 0,\ -k) = [2s,\ 0,\ k] = (2s,\ 0,\ k)$$

$$[2s,\ i,\ -k] = (2s,\ i,\ k)$$
$$[2s,\ -i,\ k] = (2s,\ i,\ k)$$
$$[2s,\ -i,\ -k] = [2s,\ i,\ k]$$
$$(2s,\ i,\ -k) = [2s,\ i,\ k]$$
$$(2s,\ -i,\ k) = [2s,\ i,\ k]$$
$$(2s,\ -i,\ -k) = [2s,\ i,\ k]$$

$$[2s+1,\ 0,\ 0] = (2s+1,\ 0,\ 0) = 0$$

$$[2s+1,\ i,\ 0] = (2s+1,\ i,\ 0)$$
$$[2s+1,\ -i,\ 0] = (2s+1,\ -i,\ 0) = -[2s+1,\ i,\ 0] =$$
$$= -(2s+1,\ i,\ 0)$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$[2s+1, \quad 0, \quad k] = -(2s+1, \quad 0, \quad k)$$
$$[2s+1, \quad 0, -k] = -(2s+1, \quad 0, -k) = -[2s+1, 0, k] = \\ = \quad (2s+1, 0, k)$$

$$[2s+1, \quad i, -k] = \quad (2s+1, i, k)$$
$$[2s+1, -i, \quad k] = -(2s+1, i, k)$$
$$[2s+1, -i, -k] = -[2s+1, i, k]$$
$$(2s+1, \quad i, -k) = \quad [2s+1, i, k]$$
$$(2s+1, -i, \quad k) = -[2s+1, i, k]$$
$$(2s+1, -i, -k) = -(2s+1, i, k)$$

Es wird sich jedoch für die weitere Entwicklung als praktischer erweisen, für die Coëfficienten (14) eine gemeinschaftliche Symbolik zu wählen, um die Entwicklungen für gerade und ungerade Exponenten gemeinschaftlich durchführen zu können. Sei also

$$\left.\begin{aligned} \text{für } s \text{ gerade:} \quad & [s, i, k] = \{s, i, k\} \\ s \text{ ungerade:} \quad & (s, i, k) = \{s, i, k\} \end{aligned}\right\} \qquad (14\,a)$$

oder, was auf dasselbe hinauskömmt:

$$\left.\begin{aligned} \{2s, i, k\} &= \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa=0}^{2s} (-1)^{\varkappa} \binom{2s}{\varkappa} \eta_{2s-\varkappa, i} \eta'_{\varkappa, k} \\ \{2s+1, i, k\} &= \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa=0}^{2s+1} \binom{2s+1}{\varkappa} \eta_{2s+1-\varkappa, i} \eta'_{\varkappa, k} \end{aligned}\right\} \qquad (14\,b)$$

Dann wird

$$\left.\begin{aligned} \Delta(M-M_1)^{2s} &= \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{2s, i, k\} \cos(iM-kM_1) \\ \Delta(M-M_1)^{2s+1} &= \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{2s+1, i, k\} \sin(iM-kM_1) \end{aligned}\right\} \qquad (15\,a)$$

und man hat

$$\{2s, \quad -i, -k\} = \quad \{2s, \quad i, k\}$$
$$\{2s+1, -i, -k\} = -\{2s+1, i, k\}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Berücksichtigt man diese beiden Relationen, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\frac{\partial^{2\iota+\mu+\nu} P}{\partial (M-M_1)^{2\iota} \partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}} \Delta (M-M_1)^{2\iota} = \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\iota} \sigma^{2\iota} Z_{\mu,\nu}^{(\sigma)} \{2\iota, \sigma-i, \sigma-k\} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

$$\frac{\partial^{2\iota+\mu+\nu+1} P}{\partial (M-M_1)^{2\iota+1} \partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}} \Delta (M-M_1)^{2\iota+1} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\iota+1} \sigma^{2\iota+1} Z_{\mu,\nu}^{(\sigma)} \{2\iota+1, \sigma-i, \sigma-k\} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

Da beide Ausdrücke identisch sind, so kann man ganz allgemein schreiben:

$$\frac{\partial^{\tau+\mu+\nu} P}{\partial (M-M_1)^{\tau} \partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}} \Delta (M-M_1)^{\tau} = \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\left[\frac{\tau+1}{2}\right]} \sigma^{\tau} Z_{\mu,\nu}^{(\sigma)} \{\tau, \sigma-i, \sigma-k\} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

wobei $\left[\frac{g}{2}\right]$ die grösste in $\frac{g}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet. Indem nun, wie früher gefunden wurde

$$(\Delta a)^{\mu} = \frac{(-a)^{\mu}}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{\mu,i} \cos iM$$

und ebenso

$$(\Delta a_1)^\nu = \frac{(-a_1)^\nu}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h'_{\nu,i} \cos iM_1$$

so ist

$$(\Delta a)^\mu (\Delta a_1)^\nu = (-1)^{\mu+\nu} \frac{a^\mu a_1^\nu}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{\mu,i} h'_{\nu,k} \cos(iM - kM_1)$$

Nach einigen leichten Reductionen ergibt sich nun [1]

$$\frac{\partial^\mu P}{\partial a^\mu} \Delta a^\mu = (-1)^\mu \cdot \frac{a^\mu}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{\mu,i} Z^{(0)}_{\mu,0} \cos iM + (-1)^\mu \frac{a^\mu}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{\mu,0} h_{\mu,\sigma-i} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - \sigma M_1)$$

$$\frac{\partial^\nu P}{\partial a_1^\nu} \Delta a_1^\nu = (-1)^\nu \frac{a_1^\nu}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h'_{\nu,k} Z^{(0)}_{0,\nu} \cos kM_1 + (-1)^\nu \frac{a_1^\nu}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{0,\nu} h'_{\nu,\sigma-k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + \sigma M - kM_1)$$

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} P}{\partial a^\mu \partial a_1^\nu} \Delta a^\mu \Delta a_1^\nu = (-1)^{\mu+\nu} \frac{a^\mu a_1^\nu}{8} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(0)}_{\mu,\nu} h_{\mu,i} h'_{\nu,k} \cos(iM - kM_1)$$

$$+ (-1)^{\mu+\nu} \frac{a^\mu a_1^\nu}{4} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu} h_{\mu,\sigma-i} h'_{\nu,\sigma-k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

[1] Wenn $\mu = \nu = 0$, so ist $Z^{(\sigma)}_{0,0} = Z^{(\sigma)}$ zu setzen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{\partial^{\tau+\mu+\nu} P}{\partial (M-M_1)^{\tau} \partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}} \Delta (M-M_1)^{\tau} \Delta a^{\mu} \Delta a_1^{\nu} =$$

$$= (-1)^{\mu+\nu+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]} \frac{a^{\mu} a_1^{\nu}}{4} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma^{\tau} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu} \begin{pmatrix} \tau, \mu, \nu \\ \sigma, i, k \end{pmatrix} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

wenn

$$\begin{pmatrix} \tau, \mu, \nu \\ \sigma, i, k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{\iota=-\infty}^{+\infty} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} \{\tau, \iota, \varkappa\} h_{\mu, \sigma-\iota-i} h'_{\nu, \sigma-\varkappa-k} \tag{16}$$

Fasst man nun in (8) die Glieder zusammen, welche von derselben Ordnung sind, so ergibt sich zunächst für die Glieder nullter Ordnung:

$$G_0 = \tfrac{1}{2} Z^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} Z^{(\sigma)} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + \sigma M - \sigma M_1) \tag{a}$$

Für die Glieder erster Ordnung:

$$\frac{\partial P}{\partial a} \Delta a = -\frac{a}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Z^{(0)}_{1,0} \tau^{(i)} \cos iM - \frac{a}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{1,0} \tau^{(\sigma-i)} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - \sigma M_1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial a_1} \Delta a_1 = -\frac{a_1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(0)}_{0,1} \tau'^{(k)} \cos kM_1 - \frac{a_1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{0,1} \tau'^{(\sigma-k)} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + \sigma M - kM_1)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{\partial P}{\partial (M-M_1)} \Delta (M-M_1) = -\tfrac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma Z^{(\sigma)} \alpha^{(\sigma-i)} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - \sigma M_1)$$

$$-\tfrac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma Z^{(\sigma)} \alpha'^{(\sigma-k)} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + \sigma M - kM_1)$$

daher ihre Summe:

$$G_1 = -\tfrac{1}{2} \Big\{ \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a Z^{(0)}_{1,0} \tau^{(i)} \cos iM + \tfrac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_1 Z^{(0)}_{0,1} \tau'^{(k)} \cos kM_1$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \{ a Z^{(\sigma)}_{1\,0} \tau^{(\sigma-i)} + \sigma Z^{(\sigma)} \alpha^{(\sigma-i)} \} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - \sigma M_1) \qquad (b)$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{ a_1 Z^{(\sigma)}_{0,1} \tau'^{(\sigma-k)} + \sigma Z^{(\sigma)} \alpha'^{(\sigma-k)} \} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + \sigma M - kM_1) \Big\}$$

Auf dieselbe Weise erhält man für die Glieder zweiter Ordnung:

$$G_2 = \tfrac{1}{4} \Big\{ \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{2,i} a^2 Z^{(\sigma)}_{2,0} \cos iM + \tfrac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h'_{2,k} a_1^2 Z^{(\sigma)}_{0,2} \cos kM_1 + \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau^{(i)} \tau'^{(k)} a a_1 Z^{(0)}_{11} \cos(iM - kM_1)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[h_{2,\sigma-i}a^2 Z^{(\sigma)}_{2,0}+\sigma a\, Z^{(\sigma)}_{1,0}\sum_{\iota=+\infty}^{+\infty}\alpha^{(i)}\tau^{\sigma-i-\iota}\right]\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-\sigma M_1\right)$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[h'_{2,\sigma-k}a_1^2 Z^{(\sigma)}_{0,2}+\sigma a_1 Z^{(\sigma)}_{0,1}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\alpha'^{(\varkappa)}\tau'^{(\sigma-\varkappa-k)}\right]\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+\sigma M-kM_1\right)$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\tau^{(\sigma-i)}\tau'^{(\sigma-k)}a\,a_1 Z^{(\sigma)}_{11}+\sigma\alpha'^{(\sigma-k)}\tau^{(\sigma-i)}a\,Z^{(\sigma)}_{1,0}+\sigma\alpha^{(\sigma-i)}\tau'^{(\sigma-k)}a_1 Z^{(\sigma)}_{0,1}\right.$$
$$\left.-\sigma^2 Z^{(\sigma)}\{2,\sigma-i,\sigma-k\}\right]\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1\right)\}$$

Man könnte auf dieselbe Weise die einzelnen Gruppen der Glieder dritter, vierter und höherer Ordnung rechnen, doch wird einerseits die Gesetzmässigkeit leichter ersichtlich und andererseits die im ersteren Falle wiederholt durchzuführende Arbeit bedeutend erleichtert, wenn gleich die allgemeine Formel für die Glieder μ^{ter} Ordnung aufgestellt wird. Für diese ist aber

$$\frac{\partial^\mu P}{\partial a^\mu}(\Delta a)^\mu=\tfrac{1}{4}(-a)^\mu\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h_{\mu,i}Z^{(0)}_{\mu,0}\cos iM+\tfrac{1}{2}(-a)^\mu\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}Z^{(\sigma)}_{\mu,0}h_{\mu,\sigma-i}\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-\sigma M_1\right)$$

$$\binom{\mu}{\lambda}\frac{\partial^\mu P}{\partial a^{\mu-\lambda}\partial a_1^\lambda}(\Delta a)^{\mu-\lambda}\Delta a_1^\lambda=\tfrac{1}{8}(-a)^{\mu-\lambda}(-a_1)^\lambda\binom{\mu}{\lambda}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Z^{(0)}_{\mu-\lambda,\lambda}h_{\mu-\lambda,i}h'_{\lambda,k}\cos\left(iM-kM_1\right)\qquad(c)$$

$$+\tfrac{1}{4}(-a)^{\mu-\lambda}(-a_1)^\lambda\binom{\mu}{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Z^{(\sigma)}_{\mu-\lambda,\lambda}h_{\mu-\lambda,\sigma-i}h'_{\lambda,\sigma-k}\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1\right)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{\partial^\mu P}{\partial a_1^\mu}\Delta a_1^\mu = \tfrac{1}{4}(-a_1)^\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h'_{\mu,k} Z^{(\sigma)}_{0,\mu} \cos kM_1 + \tfrac{1}{2}(-a_1)^\mu \sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{0,\mu} h'_{\mu,\sigma-k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + \sigma M - kM_1) \qquad (c)$$

Summirt man jetzt zunächst die mittlere Reihe von $\lambda = 1$ bis $\lambda = \mu - 1$ und addirt hierzu die erste und dritte Zeile, bedenkt aber, dass die zweite Reihe für $\lambda = 0$ in die erste, für $\lambda = \mu$ in die dritte übergeht, so hat man als Summe der von den Incrementen $\Delta(M - M_1)$ unabhängigen Glieder

$$(-1)^\mu \sum_{\lambda=0}^{\mu} \tfrac{1}{8} a^{\mu-\lambda} a_1^\lambda \binom{\mu}{\lambda} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(0)}_{\mu-\lambda,\lambda} h_{\mu-\lambda,i} h'_{\lambda,k} \cos(iM - kM_1)$$

$$+(-1)^\mu \sum_{\lambda=0}^{\mu} \left\{ \tfrac{1}{4} a^{\mu-\lambda} a_1^\lambda \binom{\mu}{\lambda} \sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{\mu-\lambda,\lambda} h_{\mu-\lambda,\sigma-i} h'_{\lambda,\sigma-k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1) \right. \qquad (d)$$

Die Gruppe (d) ist, wie sofort ersichtlich, die Entwicklung der symbolischen Glieder

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial}{\partial a_1}\Delta a_1\right)^\mu P$$

Hiezu kommen noch die Glieder der Gruppe

$$\sum_{\tau=1}^{\mu} \binom{\mu}{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial}{\partial a_1}\Delta a_1\right)^{\mu-\tau} \left(\frac{\partial}{\partial (M - M_1)}\Delta(M - M_1)\right)^\tau P$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Das allgemeine Glied dieser Entwicklung ist

$$\binom{\mu}{\tau}\binom{\mu-\tau}{\lambda}\frac{\partial^{\mu}P}{\partial a^{\mu-\tau-\lambda}\,\partial a_1^{\lambda}\,\partial\,(M-M_1)^{\tau}}\,\Delta a^{\mu-\tau-\lambda}\,\Delta a_1^{\lambda}\,\Delta\,(M-M_1)^{\tau}$$

$$=\binom{\mu}{\tau}\binom{\mu-\tau}{\lambda}(-1)^{\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}(-1)^{\mu-\tau}\cdot\tfrac{1}{4}a^{\mu-\tau-\lambda}a_1^{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sigma^{\tau}Z^{(\sigma)}_{\mu-\tau-\lambda,\,\lambda}\binom{\tau,\ \mu-\tau-\lambda,\ \lambda}{\sigma,\quad i,\quad k}\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1\right)$$

Summirt man hier zunächst nach λ von 0 bis $\mu-\tau$, so ergibt sich, weil

$$\binom{\mu}{\tau}\binom{\mu-\tau}{\lambda}=\frac{\mu!}{(\mu-\tau-\lambda)!\,\lambda!\,\tau!}$$

ist, aus obigem

$$\frac{\mu!}{\tau!}(-1)^{\mu-\tau+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}\cdot\tfrac{1}{4}\sum_{\lambda=0}^{\mu-\tau}\left\{\frac{a^{\mu-\tau-\lambda}\,a_1^{\lambda}}{(\mu-\tau-\lambda)!\,\lambda!}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sigma^{\tau}Z^{(\sigma)}_{\mu-\tau-\lambda,\,\lambda}\binom{\tau,\ \mu-\tau-\lambda,\ \lambda}{\sigma,\quad i,\quad k}\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1\right)\right\}$$

Hier ist nun noch nach τ zu summiren, und zwar von 1 bis μ, und dann durch $\mu!$ zu dividiren. Der Coëfficient von $(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1)$ wird demnach, indem

$$\mu-\tau-\lambda=\varkappa$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gesetzt wird, wo dann λ jeden Wert von 0 bis $\mu - \tau$ und $\varkappa$ den zugehörigen Werth erlangt, so also, dass stets

$$\varkappa + \lambda = \mu - \tau$$

ist:

$$\sum_{\tau=1}^{\mu} \sum_{\varkappa+\lambda=\mu-\tau} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\varkappa!\,\lambda!\,\tau!} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{4} \sigma^{\tau} Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} \tau, \varkappa, \lambda \\ \sigma, i, k \end{pmatrix} \qquad (e)$$

Für $\tau = 0$ geht dieser Ausdruck in den zweiten Theil von (d) (nachdem dieser durch $\mu!$ dividirt wurde) über; dieser letztere kann daher mit (e) vereinigt werden, indem nur die Summe nach τ von 0 bis μ genommen wird. Dann aber wird man für $\varkappa$, λ, σ alle möglichen positiven Werthe, die 0 mit eingeschlossen, zu setzen haben, wenn nur die Bedingung erfüllt wird

$$\varkappa + \lambda + \tau = \mu.$$

Setzt man daher

$$\sum_{\varkappa+\lambda+\tau=\mu} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\varkappa!\,\lambda!\,\tau!} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{4} \sigma^{\tau} Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} \tau, \varkappa, \lambda \\ \sigma, i, k \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \mu \\ \sigma, i, k \end{Bmatrix} \qquad (17\,a)$$

und fügt man den ersten, für $\sigma = 0$ geltenden Theil von (d) hinzu, indem man

$$\frac{(-1)^{\mu}}{2} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{a^{\mu-\lambda} a_1^{\lambda}}{(\mu-\lambda)!\,\lambda!} Z^{(0)}_{\mu-\lambda,\lambda} h_{\mu-\lambda,i} h'_{\lambda,k} = \begin{Bmatrix} \mu \\ i, k \end{Bmatrix} \qquad (17\,b)$$

setzt, so ergibt sich

$$G_{\mu} = \frac{1}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \mu \\ i, k \end{Bmatrix} \cos(i\,M - k\,M_1) + \Bigg) \\ + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \mu \\ \sigma, i, k \end{Bmatrix} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + i\,M - k\,M_1). \Bigg) \qquad (f)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Beachtet man die leicht zu verificirenden Relationen

$$\begin{pmatrix}0,0,0\\ \sigma,\sigma,\sigma\end{pmatrix}=4 \qquad \begin{pmatrix}0,0,1\\ \sigma,\sigma,k\end{pmatrix}=2\tau'^{(\sigma-k)}$$

$$\begin{pmatrix}0,0,0\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}0,0,1\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}0,1,0\\ \sigma,i,\sigma\end{pmatrix}=2\tau^{(\sigma-i)} \qquad \begin{pmatrix}0,1,1\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=\tau^{(\sigma-i)}\,\tau'^{(\sigma-k)}$$

$$\begin{pmatrix}0,1,0\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}0,\varkappa,\lambda\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=h_{\varkappa,\sigma-i}\,h'_{\lambda,\sigma-k}$$

$$\begin{pmatrix}1,0,0\\ \sigma,\sigma,k\end{pmatrix}=2\alpha'^{(\sigma-k)} \qquad \begin{pmatrix}1,0,0\\ \sigma,i,\sigma\end{pmatrix}=2\alpha^{(\sigma-i)}$$

$$\begin{pmatrix}1,0,0\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}1,0,0\\ \sigma,\sigma,\sigma\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}1,1,0\\ \sigma,i,\sigma\end{pmatrix}=\sum_{\iota=-\infty}^{+\infty}\alpha^{\iota}\,\tau^{(\sigma-i-\iota)} \qquad \begin{pmatrix}1,0,1\\ \sigma,\sigma,k\end{pmatrix}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\alpha'^{(\varkappa)}\,\tau'^{(\sigma-k-\varkappa)}$$

$$\begin{pmatrix}1,1,0\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=\alpha'^{(\sigma-k)}\,\tau^{(\sigma-i)} \qquad \begin{pmatrix}1,0,1\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=\alpha^{(\sigma-i)}\,\tau'^{(\sigma-k)}$$

$$\begin{pmatrix}1,1,1\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\sum_{\iota=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(\iota)}\,\tau^{(\sigma-i-\iota)}\,\tau'^{(\sigma-k)}+\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\alpha'^{(\varkappa)}\,\tau^{(\sigma-i)}\,\tau'^{(\sigma-k-\varkappa)}\right]$$

$$\begin{pmatrix}2,0,0\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=2\,\{2,\ \sigma-i,\ \sigma-k\}$$

so ergibt sich ohne Mühe die Giltigkeit der Gleichung (f) auch für $\mu=0$, $\mu=1$ und $\mu=2$, und man hat nur noch die Summe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}G_{\mu}$$

zu bilden. Sei nun

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}\mu\\ \sigma,i,k\end{Bmatrix}=C_{\sigma,i,k} \qquad \frac{1}{4}\sum_{\mu=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}\mu\\ i,k\end{Bmatrix}=C_{i,k}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so wird

$$\frac{1}{\rho^3} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{i,k} \cos(iM - kM_1) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{\sigma,i,k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1) \tag{18}$$

Schreibt man in den Ausdrücken für $\begin{Bmatrix} \mu \\ i,k \end{Bmatrix}$ an Stelle von $\mu - \lambda$ auch $\varkappa$, so dass also $\varkappa + \lambda = \mu$ sein wird, so hat man bei der Summation nach μ

$$\text{in } C_{\sigma,i,k}: \quad \varkappa + \lambda + \tau = \mu \ldots \mu = 0, 1, 2 \ldots \infty$$
$$\text{in } C_{i,k}: \quad \varkappa + \lambda = \mu \ldots\ldots \mu = 0, 1, 2. \ .\infty$$

was offenbar mit einer dreifachen Summation nach $\varkappa$, λ und τ von 0 bis ∞, respective einer zweifachen nach $\varkappa$ und λ von 0 bis ∞ zusammenfällt. Man wird daher haben

$$\left.\begin{aligned} C_{\sigma,i,k} &= \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\varkappa!\,\lambda!\,\tau!} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{4} \sigma^{\tau} Z_{\varkappa,\lambda}^{(\sigma)} \begin{pmatrix} \tau, \varkappa, \lambda \\ \sigma, i, k \end{pmatrix} \\ C_{i,k} &= \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}}{\varkappa!\,\lambda!} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{8} Z_{\varkappa,\lambda}^{(0)} h_{\varkappa,i} h'_{\lambda,k} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

In den Gleichungen (19) treten die durch (16) definirten Grössen $\begin{pmatrix} \tau, \mu, \nu \\ \sigma, i, k \end{pmatrix}$ auf; dieselben lassen sich jedoch in eine für die praktische Verwendung passendere Form bringen. Es ist nämlich

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\binom{\tau,\mu,\nu}{\sigma,i,k} = \frac{1}{2}\sum_{\iota=-\infty}^{+\infty}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\{\tau,\iota,\varkappa\}\,h_{\mu,\sigma-\iota-i}h'_{\nu,\sigma-\varkappa-k}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\iota=-\infty}^{+\infty}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\sum_{\lambda=0}\begin{bmatrix}\tau\\ \lambda\end{bmatrix}\eta_{\tau-\lambda,\iota}\eta'_{\lambda,\varkappa}h_{\mu,\sigma-\iota-i}h'_{\nu,\sigma-\varkappa-k}$$

wenn Kürze halber gesetzt wird

$$\begin{bmatrix}\tau\\ \lambda\end{bmatrix} = (-1)^{\lambda}\binom{\tau}{\lambda} \text{ für gerade } \tau$$

$$\begin{bmatrix}\tau\\ \lambda\end{bmatrix} = +\binom{\tau}{\lambda} \text{ für ungerade } \tau$$

Vertauscht man hier die Summationsordnung und fasst die von der Excentricität des gestörten Planeten abhängigen Glieder zusammen, ebenso die von der Excentricität des störenden Planeten abhängigen, so kann man

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta_{\alpha,\varkappa}h_{\beta,\gamma-\varkappa} &= E^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}\\ \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}{}_{,\varkappa}h'_{\beta,\gamma-\varkappa} &= E'^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

setzen, und dann wird

$$\binom{\tau,\mu,\nu}{\sigma,i,k} = \sum_{\lambda=0}\begin{bmatrix}\tau\\ \lambda\end{bmatrix}E^{(\sigma-i)}_{\tau-\lambda,\mu}E'^{(\sigma-k)}_{\lambda,\nu} \quad (16a)$$

Aus (20) ergibt sich

$$E^{(-\gamma)}_{\alpha,\beta} = (-1)^{\alpha}E^{(\gamma)}_{\alpha,\beta} \quad (20a)$$

woraus sofort folgt

$$E^{(0)}_{2s+1,\nu} = 0$$

Mit Hilfe der früher gefundenen Werthe von h, η kann man die sämmtlichen E als Reihen, die nach Potenzen der Excentricität fortschreiten, finden.[1] Man erhält für dieselben leicht die folgenden Probegleichungen:

[1] Diese Reihen habe ich bereits zum grössten Theile, bis inclusive zur 10. Potenz der Excentricität, berechnet.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} E^{(i)}_{2s,r} = 0 \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{=\infty} i^2 E^{(i)}_{2s,r} = 0 \qquad s > 1 \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i^2 E^{(i)}_{2,r} = -2e^r\left[1 - \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2}\right]^2 \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i E^{(i)}_{2s+1,r} = 0 \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i E^{(i)}_{1,r} = e^r\left(-1 + \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

In Folge von (16 a) ergibt sich nun an Stelle der ersten Gleichung (19)

$$C_{\sigma,i,k} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\tau} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\varkappa!\,\lambda!\,\tau!}\frac{a^\varkappa a_1^\lambda}{4}\sigma^\tau Z^{(\sigma)}_{\varkappa\lambda}\begin{bmatrix}\tau\\ \nu\end{bmatrix} E^{(\sigma-i)}_{\tau-\nu,\varkappa} E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda}$$

Setzt man nun

$$\tau - \nu = \mu$$

so wird

$$\frac{(-1)^{\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\tau!}\begin{bmatrix}\tau\\ \nu\end{bmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{\tau}{2}}}{\tau!}\cdot(-1)^\nu\frac{\tau!}{\nu!\,\mu!} = \frac{(-1)^{\frac{\mu-\nu}{2}}}{\mu!\,\nu!} \text{ für } \mu+\nu \text{ gerade}$$

und

$$\frac{(-1)^{\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\tau!}\begin{bmatrix}\tau\\ \nu\end{bmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{\tau+1}{2}}}{\tau!}\frac{\tau!}{\mu!\,\nu!} = \frac{(-1)^{\frac{\mu+\nu+1}{2}}}{\mu!\,\nu!} \text{ für } \mu+\nu \text{ ungerade}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Definirt man also

$$\left.\begin{aligned}(\varepsilon)&=(-1)^{\frac{\mu-\nu}{2}} \qquad \text{für } \mu+\nu \text{ gerade}\\ (\varepsilon)&=(-1)^{\frac{\mu+\nu+1}{2}} \qquad \text{für } \mu+\nu \text{ ungerade}\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}C_{\sigma,i,k}&=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\mu+\nu}Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa}E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda}\\ C_{i,k}&=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}}{\varkappa!\,\lambda!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{8}Z^{(0)}_{\varkappa,\lambda}h_{\varkappa,i}h'_{\lambda,k}\end{aligned}\right\} \quad (22a)$$

und dann wird

$$\frac{1}{\rho_1^3}=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_{\sigma,i,k}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+i\mathrm{M}-kM_1) \quad (22b)$$

Es genügt, die erste der beiden Formeln (22*a*) beizubehalten, indem man ohne Mühe findet, dass mit Rücksicht auf die früheren Festsetzungen die zweite aus der ersten hervorgeht; man hat hier nur die entsprechenden Werthe für die Grössen E, E' für μ, ν, $\sigma=0$ zu bemerken; sie sind:

$$E^{(0)}_{0,0}=2 \qquad E^{(0)}_{0,1}=e^2 \qquad E^{(0)}_{0,\alpha}=h_{\alpha,0} \qquad E^{(0)}_{\alpha,0}=\eta_{\alpha,0}$$

$$E^{(i)}_{0,0}=0 \qquad E^{(i)}_{0,1}=h_{1,i} \qquad E^{(i)}_{0,\alpha}=h_{\alpha,i} \qquad E^{(i)}_{\alpha,0}=\eta_{\alpha,i}$$

Bedeuten nun X, Y, Z die störenden Kräfte, so ist bekanntlich

$$X=\sum k^2 m_1\left[\frac{x'_1-x}{\rho_1^3}-\frac{x'_1}{r_1^3}\right]$$

$$Y=\sum k^2 m_1\left[\frac{y'_1-y}{\rho_1^3}-\frac{y'_1}{r_1^3}\right]$$

$$Z=\sum k^2 m_1\left[\frac{z'_1-z}{\rho_1^3}-\frac{z'_1}{r_1^3}\right]$$

wo übereinstimmend mit der eingangs gewählten Bezeichnungsweise $x'_1\,y'_1\,z'_1$ Coordinaten des störenden, x, y, z diejenigen des

gestörten Himmelskörpers, bezogen auf die Bahn des letzteren bedeuten. Hiebei ist die x-Axe nach dem Perihel der gestörten, so wie die x_1-Axe für die Coordinaten $x_1\, y_1\, z_1$, die sich auf die Bahnebene der störenden Planeten beziehen, nach dem Perihel des letzteren gerichtet. Nun findet man ohne Mühe

$$x'_1 = (1 - \sin\tfrac{1}{2}i^2 - \sin\tfrac{1}{2}i_1^2)(r_1)\cos(\pi_1 + v_1 - \pi) + \mathfrak{X}$$
$$y'_1 = (1 - \sin\tfrac{1}{2}i^2 - \sin\tfrac{1}{2}i_1^2)(r_1)\sin(\pi_1 + v_1 - \pi) + \mathfrak{Y}$$
$$z'_1 = -(r_1)\sin i \sin(\pi_1 + v_1 - \Omega) + (r_1)\sin i_1 \sin(\omega_1 + v_1) +$$
$$+ 4(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}i_1 \sin(\omega_1 + v_1)n + z_1[1 - 2\sin\tfrac{1}{2}i^2 - 2\sin\tfrac{1}{2}i_1^2 +$$
$$+ 4\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}i_1 \{\cos\tfrac{1}{2}i \cos\tfrac{1}{2}i_1 \cos(\Omega - \Omega_1) + \sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}i_1\}]$$

wobei

$$\mathfrak{X} = (r_1)\sin\tfrac{1}{2}i^2 \cos(\pi_1 + v_1 - \Omega + \omega) + (r_1)\sin\tfrac{1}{2}i_1^2 \cos(\omega_1 - \Omega_1 + v_1 + \pi)$$
$$+ 2(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}i_1 [\cos(\omega_1 + v_1 - \omega) - \cos(\omega_1 + v_1 + \omega)]m$$
$$+ z_1[-\sin i_1 \sin(\pi - \Omega_1) + \sin i \sin\omega + 4\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}i_1 \sin\omega \,.\, p]$$
$$\mathfrak{Y} = -(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i^2 \sin(\pi_1 + v_1 - \Omega + \omega) - (r_1)\sin\tfrac{1}{2}i_1^2 \sin(\omega_1 - \Omega_1 + v_1 + \pi)$$
$$+ 2(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}i_1 [\sin(\omega_1 + v_1 - \omega) + \sin(\omega_1 + v_1 + \omega)]m$$
$$+ z_1[-\sin i_1 \cos(\pi - \Omega_1) + \sin i \cos\omega + 4\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}i_1 \cos\omega \,.\, p]$$

und ferner

$$x = (r)\cos v$$
$$y = (r)\sin v$$

Für die elliptische Bewegung gelten bekanntlich die Entwicklungen

$$r\cos v = \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \rho^{(i)} \cos i\boldsymbol{M}$$
$$r\sin v = \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma^{(i)} \sin i\boldsymbol{M}$$

wo

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\rho^{(0)} = -3e; \quad \rho^{(i)} = \rho^{(-i)} = C_i^{(1)}$$
$$\sigma^{(0)} = 0; \quad \sigma^{(i)} = -\sigma^{(-i)} = \sqrt{1-e^2}\, S_i^{(1)}$$

Hieraus erhält man nun, wenn Π irgend ein beliebiger Winkel ist

$$\left.\begin{aligned} r\cos(v+\Pi) &= \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \vartheta^{(i)} \cos(iM+\Pi) \\ r\sin(v+\Pi) &= \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \vartheta^{(i)} \sin(iM+\Pi) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

demnach auch

$$\left.\begin{aligned} r\cos v &= \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \vartheta^{(i)} \cos iM \\ r\sin v &+ \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \vartheta^{(i)} \sin iM \end{aligned}\right\} \quad (23a)$$

wobei in der Entwicklung von $r\cos v$ der Coëfficient von $\cos iM$ und in der Entwicklung von $r\sin v$ der Coëfficient von $\sin iM$ derselbe ist, aber die Beziehung $\vartheta^{(i)} = \vartheta^{(-i)}$ nicht mehr besteht; es ist

$$\vartheta^{(i)} = \rho^{(i)} + \sigma^{(i)} = C_i^{(1)} + \cos\varphi\, S_i^{(1)} = \frac{1}{i}\{\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 J_{ei}^{i-1} - \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 J_{ei}^{i+1}\}$$
$$\vartheta^{(0)} = -3e = C_0^{(1)} - 2e$$

Man erhält überdies, ebenfalls durch die Coëfficienten $\vartheta^{(i)}$ ausgedrückt:

$$\cos v = -e + \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\vartheta^{(i)} \cos\varphi \cos iM$$

$$\sin v = \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\vartheta^{(i)} \cos\varphi \sin iM$$

und

$$\left.\begin{aligned}\cos(v+\Pi) &= \frac{\cos\varphi}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\,\mathfrak{S}^{(i)}\cos(iM+\Pi) - e\cos\Pi\\ \sin(v+\Pi) &= \frac{\cos\varphi}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\,\mathfrak{S}^{(i)}\sin(iM+\Pi) - e\sin\Pi\end{aligned}\right\} \quad (23\,b)$$

Die Ausdrücke für x_1' und y_1' sind einander völlig ähnlich gebaut; nur tritt an die Stelle des cos oder sin in x_1' resp. sin oder cos im Ausdrucke für y_1'. Der Werth von $\frac{1}{\rho_1^3}$ setzt sich aus einem Aggregate von cos-Gliedern zusammen; da nun

$$2\cos a\cos A = \cos(a-A)+\cos(a+A)$$
$$2\sin a\cos A = \sin(a-A)+\sin(a+A)$$

so wird man nur einen der beiden Ausdrücke $\frac{x_1'}{\rho_1^3}$, $\frac{y_1'}{\rho_1^3}$, mit denen wir uns zunächst beschäftigen, zu entwickeln haben, um durch Vertauschung der sin- und cos-Functionen sofort den anderen zu erhalten. Es ist nun zunächst hervorzuheben, dass sämmtliche in $x_1'\ y_1'\ z_1'$ auftretenden Glieder (wo die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ von der zweiten oder höherer Ordnung der Neigung sind, von denen nur der Bequemlichkeit halber zwei Glieder abgetrennt, und mit dem ersten Hauptgliede vereinigt wurden) die Form haben

$$M(r_1)\cos(v_1+\Pi);\quad N(r_1)\sin(v_1+\Pi).$$

Es handelt sich also um die Entwicklung von

$$\frac{(r_1)\cos(v_1+\Pi)}{\rho_1^3}$$

Hiefür erhält man nun

$$\frac{a_1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{S}'^{(k)}\cos(kM_1+\Pi)\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}C_{\sigma,i,l}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-lM_1)$$
$$=\frac{a_1}{4}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{S}'^{(k-l)}C_{\sigma,i,l}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1-\Pi)$$
$$+\frac{a_1}{4}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{S}'^{(l-k)}C_{\sigma,i,l}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1+\Pi)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

oder, wenn man Kürze halber setzt

$$\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{I}^{l(k-l)} C_{\sigma,i,l} = D^{(-)}_{\sigma,i,k}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{I}^{l(l-k)} C_{\sigma,i,l} = D^{(+)}_{\sigma,i,k}$$

$$\frac{(r_1)\cos(v_1+\Pi)}{\rho_1^3} = \frac{a_1}{2}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} D^{(-)}_{\sigma,i,k}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1-\Pi)$$
$$+\frac{a_1}{2}\sum_{\sigma=0}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} D^{(+)}_{\sigma,i,k}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1+\Pi) \qquad (24)$$

Die Coëfficienten $D^{(+)}$, $D^{(-)}$ lassen sich noch wesentlich vereinfachen, indem man sie genau auf dieselbe Form bringt, welche die C-Coëfficienten haben, in welchen die von den Excentricitäten und den Axenverhältnissen abhängigen Glieder getrennt erscheinen. Zu diesem Zwecke setzen wir noch

$$\frac{e}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{s,k} S^{(1)}_{i+k} = f_{s+1,i} \qquad (25\,a)$$

wo also, wie leicht zu verificiren

$$f_{s,-i} = -f_{s,i} \qquad (25\,b)$$

und speciell

$$f_{1,i} = e\,S^{(1)}_i$$

Mit Benützung von (12) und der leicht zu beweisenden Relation

$$\binom{s}{\lambda} - \binom{s}{\lambda-1} = \binom{s+1}{\lambda}\frac{s-2\lambda+1}{s+1}$$

ergibt sich ohne Mühe

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$f_{s,i}=\frac{e^s}{2^{s-1}}\left\{S_i^{(s)}+(s-2)\,S_i^{(s-2)}+\frac{(s-1)(s-4)}{1.2}\,S_i^{(s-4)}+\frac{(s-1)(s-2)(s-6)}{1.2.3}\,S_i^{(s-6)}+\ldots+\binom{s}{\lambda}\frac{s-2\lambda}{s}\,S_i^{(s-2\lambda)}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s}\binom{s}{\frac{s-1}{2}}S_i^{(1)}\text{ für }s\text{ ungerade}\right\}$$

$$\left.+\frac{2}{s}\binom{s}{\frac{s}{2}-1}S_i^{(2)}\text{ für }s\text{ gerade}\right\}$$

Als Probe hat man, da

$$\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\,S_i^{(m)}=\frac{m}{1-e}$$

die Gleichung

$$\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i f_{s,i}=\frac{1}{1-e}\;\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{s}\binom{s}{\lambda}\frac{(s-2\lambda)^2}{s}=\frac{1}{1-e}\,\frac{1}{2}\sum_{\lambda=-0}^{s}\binom{s}{\lambda}\left(s-4\lambda+\frac{4\lambda^2}{s}\right)$$

und da

$$\lambda\binom{s}{\lambda}=s\binom{s-1}{\lambda-1}\quad\text{und}\quad\sum_{\lambda=0}^{s}\binom{s}{\lambda}=2^s$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so wird

$$\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i f_{s,i} = \frac{e_s}{1-e}$$

Substituirt man in $D^{(\mp)}_{\sigma,i,k}$ für $\mathfrak{S}'^{\pm(k-l)}$ und $C_{\sigma,i,l}$ Werthe, so folgt

$$D^{(\mp)}_{\sigma,i,k} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\mu+\nu} Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda} E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa} \left\{\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(C'^{(1)}_{k-l} \pm \cos\varphi' S'^{(1)}_{k-l}) E'^{(\sigma-l)}_{\nu,\lambda} - e' E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda}\right\}$$

Nun ist

$$\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} C'^{(1)}_{k-l} E'^{(\sigma-l)}_{\nu,\lambda} = \frac{1}{2e'}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta'_{\nu,\varkappa}\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h'_{\lambda,\sigma-l-\varkappa}\tau'^{(k-l)} = \frac{1}{e'}E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda+1}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} S'^{(1)}_{k-l} E'^{(\sigma-l)}_{\nu,\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta'_{\nu,\varkappa}\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h'_{\lambda,\sigma-l-\varkappa} S'^{(1)}_{k-l} = \frac{1}{2e'}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta'_{\nu,\varkappa} f'_{\lambda+1,k+\varkappa-\sigma}$$

Setzt man daher, analog mit (20)

$$\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta_{\alpha,\varkappa} f_{\beta,\gamma-\varkappa} = F^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}, \quad \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta'_{\alpha,\varkappa} f'_{\beta,\gamma-\varkappa} F'^{(\gamma)}_{\alpha,\beta} \tag{26}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$F^{(-\cdot-\gamma)}_{\alpha,\beta} = (-1)^{\alpha+1} F^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}$$

so wird

$$\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} S'^{(1)}_{k-l} E'^{(\sigma-l)}_{\nu,\lambda} = -\frac{1}{e'} F'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda+1}$$

folglich

$$D^{(\mp)}_{\sigma,i,k} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\mu+\nu} Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda} E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa}\left(\frac{1}{e'}E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda+1} \mp \frac{\cos\varphi'}{e'} F'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda+1} - e' E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda}\right)$$

Die Werthe von $D^{(\mp)}_{\sigma,i,k}$ werden genau dieselben sein für $\frac{x'_1}{\rho_1^3}$ und $\frac{y'_1}{\rho_1^3}$, und zwar für sämmtliche correspondirende aus den einzelnen Theilen von x'_1 und y'_1 entstehende Glieder, denn es wird ebenfalls

$$\left.\begin{aligned}\frac{(r_1)\sin(v_1+\Pi)}{\rho_1^3} = &-\frac{a_1}{2}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} D^{(-)}_{\sigma,i,k}\sin(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1-\Pi)\\ &+\frac{a_1}{2}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} D^{(+)}_{\sigma,i,k}\sin(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1+\Pi)\end{aligned}\right\}\quad(24a)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Für das erste Glied in $x'_1\ y'_1$ hat man zu setzen

$$\Pi = \pi_1 - \pi$$

und den Coëfficienten $D^{(\mp)}_{\sigma,i,k}$ zu multipliciren mit

$$(1 - \sin\tfrac{1}{2}i^2 - \sin\tfrac{1}{2}i_1^2);$$

für die folgenden Glieder würde Π immer andere Werthe haben (ebenso wie die mit den D zu multiplicirenden Coëfficienten) und es werden dann die Argumente die Form erhalten

$$(\sigma + \alpha)\pi - (\sigma + \beta)\pi_1 + iM - kM_1 + \gamma\Omega + \delta\Omega_1$$

wo α, β, γ, δ die Werthe $0, +1$ und -1 erhalten können. Beachtet man, dass die von z_1 unabhängigen Glieder in z'_1 dieselbe Form haben, so wird man für $\frac{z'_1}{\rho_1^3}$ (für diese Glieder) auch die obige Entwicklung verwenden können. Die Zusammenfassung der Glieder mit gleichen Argumenten, so wie auch das Heraussuchen derjenigen Glieder, die zu einem gegebenen Argumente gehören, wird praktisch keinen Schwierigkeiten unterliegen, da es sehr leicht ist, denjenigen Werth von Π zu bestimmen, für welchen aus (24) oder (24a) das gegebene Argument entsteht.

Was die von z_1 abhängigen Glieder anbelangt, so ist zu bemerken, dass nächst den von den Neigungen abhängigen Coëfficienten die Argumente der sin und cos von den wahren Anomalien unabhängig sind, so dass hier nur die Formen

$$\frac{Mz_1\cos\Pi}{\rho_1^3} \text{ und } \frac{Nz_1\sin\Pi}{\rho_1^3}$$

zu betrachten sind. Da z_1 die Störung in Breite für den störenden Himmelskörper ist, so werden die Coëfficienten $M\cos\Pi$, $N\sin\Pi$ immer direct mit $C_{\sigma,i,k}$ vereinigt werden können. Nur beim Monde, wo die Argumente Ω, ω einer raschen Änderung unterliegen,[1] wird man ohne Schwierigkeit

---

[1] In allen anderen Fällen wird man auch $\cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$ zerlegen und die Glieder, deren Argumente $(iM - kM_1)$ sind, vereinigen können.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{z_1 \cos \Pi}{\rho_1^3} = z_1 \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2} C_{\sigma,i,k} [\cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1 - \Pi) + \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1 + \Pi)]$$

$$\frac{z_1 \sin \Pi}{\rho_1^3} = z_1 \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2} C_{\sigma,i,k} [-\sin(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1 - \Pi) + \sin(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1 + \Pi)]$$

verwenden können. In dem Ausdruck für z_1' kann man den Factor von z_1 überhaupt als constant ansehen.

Ferner hat man

$$\frac{x}{\rho_1^3} = \frac{(r)\cos v}{\rho_1^3} = \frac{a}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{Z}^{(i)} \cos iM \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{\sigma,l,k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + lM + kM_1)$$

$$= \frac{a}{2} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_{\sigma,i,k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

und

$$\frac{y}{\rho_1^3} = \frac{a}{2} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_{\sigma,i,k} \sin(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1) \qquad (27)$$

wenn

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$G_{\sigma,i,k} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\vartheta^{(i-l)} + \vartheta^{(l-i)}\right) C_{\sigma,l,k}$$

und

$$H_{\sigma,i,k} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\vartheta^{(i-l)} - \vartheta^{(l-i)}\right) C_{\sigma,l,k}$$

Da aber

$$\vartheta^{(i-l)} + \vartheta^{(l-i)} = 2\, C^{(1)}_{i-l}; \quad \vartheta^{(i-l)} - \vartheta^{(l-i)} = 2\cos\varphi\, S^{(1)}_{i-l}$$

und diese Grössen nur von der Excentricität des gestörten Planeten abhängen, so wird

$$G_{\sigma,i,k} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}\,(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{4}\, \sigma^{\mu+\nu}\, Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}\, E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda} \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} C^{(1)}_{i-l}\, E^{(\sigma-l)}_{\mu,\varkappa} - 2\,e\, E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa} \right)$$

$$H_{\sigma,i,k} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}\,(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,!\,\mu\nu!.} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{4}\, \sigma^{\mu+\nu}\, Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}\, E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda} \cos\varphi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S^{(1)}_{i-l}\, E^{(\sigma-l)}_{\mu,\varkappa}$$

Wie früher ist aber auch wieder

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} C^{(1)}_{i-l}\, E^{(\sigma-l)}_{\mu,\varkappa} = \frac{2}{e}\, E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa+1}; \quad \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S^{(1)}_{i-l}\, E^{(\sigma-l)}_{\mu,\varkappa} = -\frac{2}{e}\, F^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa-1}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Demzufolge

$$G_{\sigma,i,k} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\mu+\nu} Z_{\varkappa,\lambda}^{(\sigma)}\left(\frac{2}{e}E_{\mu,\varkappa+1}^{(\sigma-i)} - 2e E_{\mu,\varkappa}^{(\sigma-i)}\right) E_{\nu,\lambda}^{\prime(\sigma-k)}$$

$$H_{\sigma,i,k} = -\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\mu+\nu} Z_{\varkappa,\lambda}^{(\sigma)}\cdot\frac{2\cos\varphi}{e} F_{\mu,\varkappa+1}^{(\sigma-i)} E_{\nu,\lambda}^{\prime(\sigma-k)}$$

Endlich hat man

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{(r_1)^3} - \frac{3}{2}\frac{z_1^2}{(r_1)^5} + \frac{3.5}{2.4}\frac{z_1^4}{(r_1)^7} - \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{z_1^6}{(r_1)^9} + .$$

wo (r_1) der gestörte Radius vector des störenden Planeten ist. Berücksichtigt man dessen Störungen auch hier wieder dadurch, dass man im Resultate $a_1(1+\gamma_1)$ an Stelle von a_1 setzt, und beachtet, dass in den Entwicklungen

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_i^{(n)}\cos iM; \quad \left(\frac{a}{r}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_i^{(-n)}\cos iM$$

die Coëfficienten $A_i^{(n)}$, $A_i^{(-n)}$ als bekannte Functionen der Excentricität anzusehen sind, so wird

$$\frac{1}{(r_1)^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{a_1^n}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_\tau^{\prime(-n)}\cos iM_1$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und daher

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1$$

wenn

$$Y'^{(i)} = \frac{A_i'^{(-3)}}{a_1^3} - \frac{3}{2} z_1^2 \frac{A_i'^{(-5)}}{a_1^5} + \frac{3.5}{2.4} z_1^4 \frac{A_i'^{(-7)}}{a_1^7} - \frac{3.5.7}{2.4.6} z_1^6 \frac{A_i'^{(-9)}}{a_1^9} \ldots (28)$$

also

$$Y'^{(-i)} = Y'^{(i)}$$

ist. Man hat demnach in den Ausdrücken für $\frac{x_1'}{r_1^3}, \frac{y_1'}{r_1^3}, \frac{z_1'}{r_1^3}$ ein Aggregat von Gliedern der Form

$$M(r_1) \cos(v_1 + \Pi) \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1$$

$$N(r_1) \sin(v_1 + \Pi) \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1$$

$$\tfrac{1}{2} z_1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1$$

Setzt man hier die entsprechenden Reihen ein, und führt die Entwicklungen in der wiederholt erläuterten Weise durch, so erhält man, abgesehen von den Coëfficienten M, N

$$(r_1) \cos(v_1 + \Pi) \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1 = \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L_i \cos(i M_1 + \Pi)$$

$$(r_1) \sin(v_1 + \Pi) \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1 = \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L_i \sin(i M_1 + \Pi)$$

wenn

$$L_i = \frac{a_1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y'^{(k-i)} \mathfrak{Z}'^{(k)}$$

$Y'^{(i)}$ hängt aber noch von den Störungen des Himmelskörpers ab, und allgemein tritt das Glied auf

$$z_1^{\alpha} \frac{A_i^{(-\beta)}}{a_1^{\beta}(1+\gamma_1)^{\beta}}$$

so dass man die Formen erhält

$$z_1^{\alpha}(1+\gamma_1)^{-\beta+1}.1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L_i \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(iM_1+\Pi)$$

wo

$$L_i = \tfrac{1}{2}\cdot \frac{1}{a_1^{\beta-1}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} . A'^{(-\beta)}_{k-i} \mathfrak{Y}'^{(k)}$$

und

$$z_1^{\alpha-1}(1+\gamma_1)^{-\beta}.1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L_i \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(iM_1+\Pi)$$

wo

$$L_i = \tfrac{1}{2}\frac{1}{a_1^{\beta}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A'^{(-\beta)}_{k-i} \mathfrak{Y}'^{(k)}$$

und mit Rücksicht auf den Werth von Π wird man jederzeit ohne Mühe in der Lage sein, die in den Störungen bedeutend werdenden Glieder (mit kleinen Integrationsdivisoren) herauszusuchen.

Ebendasselbe gilt auch von den $Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}$. Sieht man von den von der Neigung abhängigen Theilen ab, so wird man

$$(Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda})_0 = \frac{\partial^{\mu+\nu} c_1^{(\sigma)}}{\partial a^{\mu}\, \partial a_1^{\nu}}$$

zu setzen haben. Setzt man der Reihe nach $Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}$ gleich

$$-\frac{3}{2}\zeta_1^2 \frac{\partial^{\mu+\nu} c_2^{(\sigma)}}{\partial a^{\mu}\partial a_1^{\nu}}; \quad +\frac{3.5}{2.4}\zeta_1^4 \frac{\partial^{\mu+\nu} c_3^{(\sigma)}}{\partial a^{\mu}\partial a_1^{\nu}}; \quad -\frac{3.5.7}{2.4.6}\zeta_1^6 \frac{\partial^{\mu+\nu} c_4^{(\sigma)}}{\partial a^{\mu}\partial a_1^{\nu}}$$

so ergeben sich die von den Quadraten, vierten und sechsten Potenzen der Neigung abhängigen Glieder. Nun kann man immer annehmen[1]

[1] Wenn man die Producte, beziehungsweise der zweiten Potenzen der Massen in die fünften Potenzen der Neigungen, der dritten Potenzen der Massen in die zweiten Potenzen der Neigungen, der vierten Potenzen der Massen in die ersten Potenzen der Neigungen, ferner der fünften Potenzen der Massen und die achten Potenzen der Neigungen vernachlässigt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\zeta_1^2 = -2(r)(r_1)\textcircled{a} - 2(r)\textcircled{aa}z_1 - 2(r_1)\textcircled{ab}z + (z_1 - z)^2$$

$$\zeta_1^4 = 4[(r)(r_1)\textcircled{a}]^2 + 4(r)(r_1)\textcircled{a}.(r)\textcircled{aa}z_1 + 4(r)(r_1)\textcircled{a}.(r_1)\textcircled{ab}z$$

$$\zeta_1^6 = -8[(r)(r_1)\textcircled{a}]^3$$

Wählt man für die Störungen der Planeten untereinander (der kleinen Planeten durch die grossen) die Bahnebene des gestörten Planeten zur Fundamentalebene, so wird demnach

$$\textcircled{a} = \sin\tfrac{1}{2}i_1^2[\cos[\pi + v + \omega_1 - \Omega_1 + v) - \cos(\pi + v - \pi_1 - v_1)]$$

$$\textcircled{aa} = -\sin i_1 \sin(\pi + v - \Omega_1)$$

$$\textcircled{ab} = +\sin i_1 \sin(\omega_1 + v_1)$$

Für den Mond wird man die Bahnebene der Erde (des Hauptplaneten) zur Fundamentalebene wählen, und dann wird für die von der Sonne herrührenden störenden Kräfte

$$\textcircled{a} = \sin\tfrac{1}{2}i^2[\cos(\pi_1 + v_1 + \omega - \Omega + v) - \cos(\pi + v - \pi_1 - v_1)]$$

$$\textcircled{aa} = \sin i \sin(\omega + v)$$

$$\textcircled{ab} = -\sin i \sin(\pi_1 + v_1 - \Omega)$$

Für die durch die Planeten bewirkten störenden Kräfte kann man sich auf die erste Potenz der Massen beschränken, und hat dann

$$\zeta_1^2 = -2(r)(r_1)\textcircled{a}; \quad \zeta_1^4 = +4[(r)(r_1)\textcircled{a}]^2$$

wobei für $\textcircled{a}$ der vollständige Ausdruck zu setzen ist.

Es sind nun die Ausdrücke für $(r)\textcircled{aa}$, $(r_1)\textcircled{ab}$ von der Form

$$(r)\textcircled{aa} = M.\frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}^{(i)} \sin(iM + \Pi)$$

$$(r_1)\textcircled{ab} = M_1 \frac{a_1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}'^{(k)} \sin(kM_1 + \Pi_1)$$

und $(r)(r_1)\textcircled{a}$ besteht aus einem Aggregat von zwei (im letzten Falle von sechs) Gliedern der Form

$$N(r)(r_1)\cos(v \pm v_1 + \Xi) =$$
$$= N\frac{aa_1}{4}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}^{(i)}\mathfrak{S}'^{(k)}\cos(iM \pm kM_1 + \Xi)$$

Es werden sich demnach auch die Ausdrücke $[(r)(r_1)\textcircled{a}]^2$; $[(r)(r_1)\textcircled{a}]^3$; $(r)(r_1)\textcircled{a}\cdot(r)\textcircled{aa}$; $(r)(r_1)\textcircled{a}(r_1)\textcircled{ab}$ in eben solche Reihen entwickeln lassen, welche nach den Argumenten $iM \pm kM_1 + \Pi$ fortschreiten, wo Π eine für jede dieser Reihen (von denen allerdings mehrere in den obigen Producten auftreten können) nur von ω, Ω, ω_1, Ω_1 abhängiger Winkel ist, und die Coëfficienten Potenzreihen der Excentricitäten e und e_1 sind, deren Gesetz sich durch Multiplication der Ausdrücke für $(r)\textcircled{aa}$, $(r_1)\textcircled{ab}$, $(r)(r_1)\textcircled{a}$ ergibt. Setzt man die erhaltenen Werthe nach Absonderung der von dem Axenverhältnisse abhängigen Differentialquotienten $\frac{\partial^{\mu+\nu} c_\rho^{(s)}}{\partial a^\mu \partial a_1^\nu}$ an Stelle von $Z_{\mu,\nu}^{(s)}$ in den Ausdruck für $C_{\sigma,i,k}$ ein, so sieht man sofort, dass die Coëfficienten der von der Neigung abhängigen Glieder dieselbe Form haben werden, wie die $C_{\sigma,i,k}$, $G_{\sigma,i,k}$, $H_{\sigma,i,k}$, nur werden an Stelle der von den Excentricitäten abhängigen Reihen $E_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$, $F_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$ andere Reihen auftreten, deren analytisches Gesetz sich nicht so leicht anschreiben lässt, die aber algebraisch ebenfalls ein für allemal entwickelt und für die störenden Kräfte stets angewendet werden können. Dabei ist zu bemerken, dass zu den Argumenten $\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1$ noch gewisse Bögen Π treten, die die Form

$$\alpha\pi + \beta\pi_1 + \gamma\Omega + \delta\Omega_1$$

haben, wo α, β, γ, δ bestimmte ganze Zahlen sind, und es wird keiner Schwierigkeit unterliegen, jene Argumente zu wählen, die Anlass zum Entstehen merklicher Störungsglieder geben.

Endlich ist noch zu bemerken, dass man in der Entwicklung

$$(a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos\theta)^{-s} = \tfrac{1}{2}c_s^{(0)} + c_s^{(1)}\cos\theta + c_s^{(2)}\cos 2\theta + \ldots$$

in den Coëfficienten $c_s^{(i)}$ überall $a(1+\gamma)$, $a_1(1+\gamma_1)$ an Stelle von a, a_1 zu setzen hat. Ist nun

$$\alpha = \frac{a}{a_1}$$
$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\theta + b_s^{(2)}\cos 2\theta + \ldots$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so ist

$$b^{(i)}_{-\frac{1}{2}} = -2\frac{1.3.5\ldots(2i-3)}{2.4.6\ldots 2i}\alpha^i\left\{1-\tfrac{1}{2}\frac{2i-1}{2i+2}\alpha^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1.1}{2.4}\frac{(2i-1)(2i+1)}{(2i+2)(2i+4)}\alpha^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{(2i-1)(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)(2i+6)}\alpha^6-\ldots\right\}$$

$$b^{(i)}_{\frac{3}{2}} = -\frac{(2i+1)(2i-1)}{(1-\alpha^2)^2}b^{(i)}_{-\frac{1}{2}}$$

$$\tfrac{1}{2}(b^{(i)}_{s+1}+b^{(i+1)}_{s+1}) = \frac{1}{2s(1-\alpha^2)}\left\{(2s-1)\left(\frac{b^{(i)}_s+b^{(i+1)}_s}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+(2i+1)\left(\frac{b^{(i)}_s-b^{(i+1)}_s}{2}\right)\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(b^{(i)}_{s+1}-b^{(i+1)}_{s+1}) = \frac{1}{2s(1+\alpha^2)}\left\{(2i+1)\left(\frac{b^{(i)}_s+b^{(i+1)}_s}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+(2s-1)\left(\frac{b^{(i)}_s-b^{(i+1)}_s}{2}\right)\right\}$$

$$c^{(i)}_s = b^{(i)}_s\,.\,a_1^{-2s}$$

Nun ist

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta a_1}{a_1}$$

und da

$$\Delta a = a\gamma,\quad \Delta a_1 = a_1\gamma_1$$

so wird

$$\Delta\alpha = \alpha(\gamma-\gamma_1)$$

und ferner

$$\Delta b^{(i)}_{-\frac{1}{2}} = \left\{ib^{(i)}_{-\frac{1}{2}}+2\frac{1.3.5\ldots(2i-3)}{2.4.6\ldots 2i}\alpha^{i+2}\left[\frac{2i-1}{2i+1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{(2i-1)(2i+1)}{(2i+2)(2i+4)}\alpha^2+\frac{1.3}{2.4}\frac{(2i-1)(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)(2i+6)}\alpha^4+\ldots\right]\right\}(\gamma-\gamma_1)$$

$$\Delta b^{(i)}_3 = \left\{ib^{(i)}_{\frac{3}{2}}-2\frac{1.3.5\ldots(2i-3)(2i-1)(2i+1)}{2.4.6\ldots 2i}\frac{\alpha^{i+2}}{(1-\alpha^2)^2}\left[\frac{2i-1}{2i+2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{(2i-1)(2i+1)}{(2i+2)(2i+4)}\alpha^2+\ldots\right]+\frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2}\right\}(\gamma-\gamma_1)$$

$$\tfrac{1}{2}(\Delta b^{(i)}_{s+1} \pm \Delta b^{(i)}_{s+1}) = \pm \frac{\alpha^2(\gamma - \gamma_1)}{1 \mp \alpha^2} \left\{ b^{(i)}_{s+1} \pm b^{(i+1)}_{s+1} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2s\,(1 \mp \alpha^2)} \left\{ \frac{2s-1}{2} (\Delta b^{(i)}_s \pm \Delta b^{(i+1)}_s) + \frac{2i+1}{2} (\Delta b^{(i)}_s \mp \Delta b^{(i+1)}_s) \right\}$$

$$\Delta c^{(i)}_s = a_1^{-2s} \Delta b^{(i)}_s - 2s\, c^{(i)}_s \gamma_1$$

Ebenso lassen sich die Werthe der wegen der Störungen des Radius vectors auftretenden Incremente der Differentialquotienten der $c^{(i)}_s$ ableiten. Wenngleich die Formeln etwas weitläufig werden, was noch viel mehr der Fall wäre, wenn man überall auch auf die zweiten und dritten Potenzen der Massen Rücksicht nehmen wollte, so wird doch in jenen Fällen, wo es sich um die Entwicklung gewisser mit kleinen Integrationsdivisoren behafteter Glieder handelt, diese independente Entwicklung der störenden Kräfte nicht zu unterschätzende Vortheile bieten, und zwar um so mehr, da es sich hiebei um Glieder höherer Ordnung der Excentricitäten handelt, wo man sich auf niederere Ordnungen der Neigungen, im Allgemeinen auf die zweiten Potenzen der Massen wird beschränken können; jedenfalls wird man in den $c^{(i)}_s$ mit diesen abbrechen können (also in der Entwicklung der störenden Kräfte die mit γ^2, γ_1^2 behafteten Glieder weglassen) und bei den Producten der Differentialquotienten der $c^{(i)}_s$ in die ersten Potenzen der Störungen (so dass die in den störenden Kräften auftretenden Producte der $\frac{\partial^{\mu+\nu} c^{(i)}_s}{\partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}} . \gamma$ etc. bereits weggelassen werden), da der λ^{te} Differentialquotient von $c^{(i)}_s$ von der λ^{ten} (oder einer höheren) Ordnung der Excentricitäten des störenden und gestörten Körpers ist.